ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ -- ΑΛΓΕΒΡΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Άσκηση 1^{η} – Γραμμικά συστήματα

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x - \lambda y = 3\lambda - 1$ και $\varepsilon_2 : y = \lambda x + \lambda - 5$.

Να βρεθεί το $\lambda \in R$, ώστε οι ευθείες να τέμνονται.

ΛΥΣΗ

Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) θα τέμνονται όταν το μεταξύ τους σύστημα

έχει μια λύση ως προς x και y. Η ευθεία (ε_2) γράφεται: $\lambda x - y = 5 - \lambda$

Το μεταξύ τους σύστημα είναι: $\begin{cases} 2x - \lambda y = 3\lambda - 1 \\ \lambda x - y = 5 - \lambda \end{cases}$. Το σύστημα αυτό

έχει μοναδική λύση όταν η ορίζουσα του D είναι διάφορη του μηδενός.

Είναι: $D = \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - \lambda \cdot (-\lambda) = \lambda^2 - 2$.

Πρέπει $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \neq 2 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm\sqrt{2}$. Επομένως για

$\lambda \neq \pm\sqrt{2}$ οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται.

Άσκηση 2^{η} – Γραμμικά συστήματα

Για τις διάφορες τιμές των $\lambda, \mu \in R$, να λυθούν τα παρακάτω

συστήματα:

α) $\begin{cases} \lambda x - y = \mu \\ x + y = 1 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x + \mu y = \lambda \\ x + \lambda y = \mu \end{cases}$

ΛΥΣΗ

α) Βρίσκουμε πρώτα τις ορίζουσες D, D_x και D_y του συστήματος.

Είναι: $D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda + 1$, $D_x = \begin{vmatrix} \mu & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \mu + 1$,

$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - \mu$

Διακρίνουμε τώρα τις παρακάτω περιπτώσεις:

• Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -1$, τότε το σύστημα έχει μοναδική

λύση τη: $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{\mu+1}{\lambda+1}$ και $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{\lambda-\mu}{\lambda+1}$.

Άρα $(x, y) = \left(\dfrac{\mu+1}{\lambda+1}, \ \dfrac{\lambda-\mu}{\lambda+1}\right)$.

• Αν $D = 0 \Leftrightarrow \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$, τότε το σύστημα θα έχει άπειρες

λύσεις ή θα είναι αδύνατο. Αντικαθιστώντας $\lambda = -1$ στο σύστημα,

θα έχουμε:

$$\begin{cases} -x - y = \mu \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -\mu \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\mu = 1 \Leftrightarrow \mu = -1.$$

Για $\mu = -1$ είναι: $x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x, y) = (x, \ 1 - x)$, $x \in R$.
Για $\mu \neq -1$, το σύστημα θα είναι αδύνατο. Επομένως για $\lambda = -1$ και $\mu = -1$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, ενώ για $\lambda = -1$ και $\mu \neq -1$, το σύστημα είναι αδύνατο.

β) Βρίσκουμε τις ορίζουσες D, D_x και D_y του συστήματος.

$$D=\begin{vmatrix}1 & \mu\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda-\mu$$

$$D_x=\begin{vmatrix}\lambda & \mu\\ \mu & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\mu^2=(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ 1 & \mu\end{vmatrix}=\mu-\lambda$$

Διακρίνουμε τώρα τις παρακάτω περιπτώσεις:

• Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda-\mu\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq\mu$, το σύστημα θα έχει μοναδική λύση τη: $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)}{\lambda-\mu}=\lambda+\mu$ και

$y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{\mu-\lambda}{\lambda-\mu}=-\dfrac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu}=-1$. Άρα $(x,y)=(\lambda+\mu,\ -1)$.

• Αν $D=0 \Leftrightarrow \lambda-\mu=0 \Leftrightarrow \lambda=\mu$, θα έχουμε:

$$\begin{cases}x+\mu y=\mu\\ x+\mu y=\mu\end{cases}\Leftrightarrow x+\mu y=\mu \Leftrightarrow x=\mu-\mu y.$$

Επομένως το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y)=(\mu-\mu y,\ y)$, $y\in R$.

Άσκηση 3η – Γραμμικά συστήματα

Σε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y

ισχύει: $D^2+D_x^2+D_y^2=4D+2D_x-5$.

α) Δείξτε ότι: $(D-2)^2+(D_x-1)^2+D_y^2=0$

β) Να βρεθούν τα x, y.

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$D^2+D_x^2+D_y^2=4D+2D_x-5\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow D^2+D_x^2+D_y^2-4D-2D_x+5=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow D^2-4D+4+D_x^2-2D_x+1+D_y^2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (D-2)^2+(D_x-1)^2+D_y^2=0$$

β) Γνωρίζουμε ότι άθροισμα τετραγώνων όταν είναι ίσο με το μηδέν, κάθε όρος του αθροίσματος θα είναι ίσος με το μηδέν. Επομένως θα είναι: $(D-2)^2+(D_x-1)^2+D_y^2=0\Leftrightarrow D-2=0$ και $D_x-1=0$ και $D_y=0$, οπότε $D=2$, $D_x=1$ και $D_y=0$. Επειδή $D=2\neq 0$, το σύστημα θα έχει μοναδική λύση τη: $x=\frac{D_x}{D}=\frac{1}{2}$ και $y=\frac{D_y}{D}=\frac{0}{2}=0$. Επομένως $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4η – Μονοτονία - Ακρότατα

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=3x-4$ β) $f(x)=-2x+1$

γ) $f(x)=\sqrt{4-x}$ δ) $f(x)=\dfrac{-3}{x}, \quad x\geq 1$

ΛΥΣΗ

- Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$.

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το R.

Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία $x_1, x_2 \in R$ με $x_1<x_2$ και «χτιστά» θα κατασκευάσουμε τα $f(x_1)$ και $f(x_2)$. Αν είναι $f(x_1)<f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα ενώ αν είναι $f(x_1)>f(x_2)$ τότε η f θα είναι γνησίως φθίνουσα. Θα έχουμε:

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow 3x_1<3x_2 \Leftrightarrow 3x_1-4<3x_2-4 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το R.

Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$. Θα έχουμε:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -2x_1 > -2x_2 \Leftrightarrow -2x_1 + 1 > -2x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

γ) Για το πεδίο ορισμού της f έχουμε: $4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$ επομένως

$A_f = (-\infty, 4]$. Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 4]$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα είναι:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 4 - x_1 > 4 - x_2 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x_1} > \sqrt{4 - x_2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

δ) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{-3}{x}$ ορίζεται στο $[1, +\infty)$.

Έστω $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα είναι:

$$x_1 < x_2 \overset{x_1, x_2 > 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{-3}{x_1} < \frac{-3}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Άσκηση $5^η$ – Μονοτονία - Ακρότατα

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο R και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(2, 4)$.

Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2) < 4$.

ΛΥΣΗ

Μια συνάρτηση f είναι αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(2,4)$ οπότε $f(2)=4 \quad (1)$. Επομένως θα έχουμε:

$$f(x^2)<4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x^2)<f(2) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2<2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}<\sqrt{2} \Leftrightarrow |x|<\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}.$$

Άσκηση 6^{η} – Μονοτονία - Ακρότατα

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x=1$.

ΛΥΣΗ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν ισχύει $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Για $x=1$ είναι $f(1)=\dfrac{2}{2}=1$. Επομένως για να παρουσιάζει η f μέγιστο στο $x=1$ θα πρέπει να ισχύει $f(x) \le f(1)$ για κάθε $x \in R$ ή $f(x) \le 1$ για κάθε $x \in R$. Πράγματι:

$$f(x) \le 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} \le 1 \Leftrightarrow (x^2+1)\cdot\frac{2x}{x^2+1} \le x^2+1 \Leftrightarrow 2x \le x^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0$$ το οποίο ισχύει για κάθε $x \in R$.

Άσκηση 7^{η} – Άρτιες - Περιττές συναρτήσεις

Να εξετάσετε ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$ και ποιες έχουν κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

α) $f(x)=\dfrac{2}{x^6}-|x|$ β) $f(x)=\sqrt{3x+1}+\sqrt{1-3x}$

γ) $f(x)=(x-1)^2+(x+1)^2$ δ) $f(x)=\dfrac{x|x|}{x^8-1}$

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ ενώ η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Επομένως εξετάζουμε ποιες από τις επόμενες συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2}{x^6}-|x|$ είναι $A_f=R-\{0\}$. Επομένως για κάθε $x\in A_f$ και $-x\in A_f$. Έχουμε:

$$f(-x)=\frac{2}{(-x)^6}-|-x|=\frac{2}{x^6}-|x|=f(x).$$

Άρα η f είναι άρτια συνάρτηση και συνεπώς η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

β) Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{3x+1}-\sqrt{1-3x}$ θα πρέπει να ισχύουν $3x+1\geq 0$ και $1-3x\geq 0$. Είναι:

- $3x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{3} \quad (1)$
- $1-3x\geq 0 \Leftrightarrow 3x\leq 1 \Leftrightarrow x\leq \frac{1}{3} \quad (2)$

Συναληθεύοντας τις (1) και (2) έχουμε $-\frac{1}{3}\leq x\leq \frac{1}{3}$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$. Οπότε για κάθε $x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ και $-x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$. Θα έχουμε λοιπόν:

$$f(-x)=\sqrt{3(-x)+1}-\sqrt{1-3(-x)}=\sqrt{1-3x}-\sqrt{3x+1}=$$

$$=-\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{1-3x}\right)=-f(x).$$

Αφού είναι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in A_f$ η f είναι περιττή συνάρτηση και επομένως η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

γ) Το πεδίο ορισμού της f είναι το R οπότε για κάθε $x\in R$ και $-x\in R$. Έχουμε:

$$f(-x)=(-x-1)^2-(-x+1)^2=\left[-(x+1)\right]^2-\left[-(x-1)\right]^2=$$

$$=(x+1)^2-(x-1)^2=f(x).$$

Αφού είναι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$ η f είναι άρτια συνάρτηση και επομένως η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

δ) Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x|x|}{x^8-1}$ θα πρέπει να είναι

$x^8-1\neq 0 \Leftrightarrow x^8\neq 1 \Leftrightarrow \sqrt[8]{x}\neq\sqrt[8]{1} \Leftrightarrow |x|\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f=R-\{-1,1\}$.

Για κάθε $x\in A_f$ και $-x\in A_f$. Έχουμε:

$$f(-x)=\frac{-x|-x|}{(-x)^8-1}=\frac{-x|x|}{x^8-1}=-\frac{x|x|}{x^8-1}=-f(x).$$

Αφού είναι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in A_f$ η f είναι περιττή συνάρτηση και συνεπώς η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ε) Το πεδίο ορισμού της f είναι το R. Επομένως για κάθε $x\in R$ και $-x\in R$. Έχουμε: $f(-x)=|-x-8|+|-x+8|=|-(x+8)|+|-(x-8)|=$

$=|x+8|+|x-8|=f(x)$.

Άρα η f είναι άρτια συνάρτηση και επομένως η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

Άσκηση 8$^{\eta}$ – Μετατόπιση καμπύλης

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = -2x^2 + 5$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ:

α) Κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα πάνω.

β) Κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και 6 μονάδες προς τα κάτω.

γ) Κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και 2 μονάδες προς τα πάνω.

δ) Κατά 4 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα κάτω.

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$g\left(x\right) = \varphi(x - c),\quad c > 0$ προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά.

Επομένως η συνάρτηση που προκύπτει όταν μετατοπίσουμε την

$\varphi(x) = -2x^2 + 5$ κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά είναι η

$g(x) = 2(x-1)^2 + 5$.

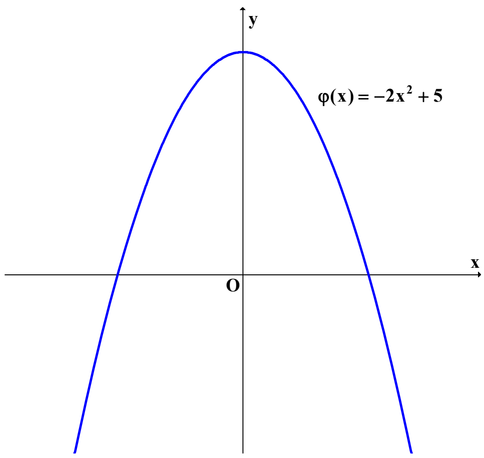
Επίσης γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

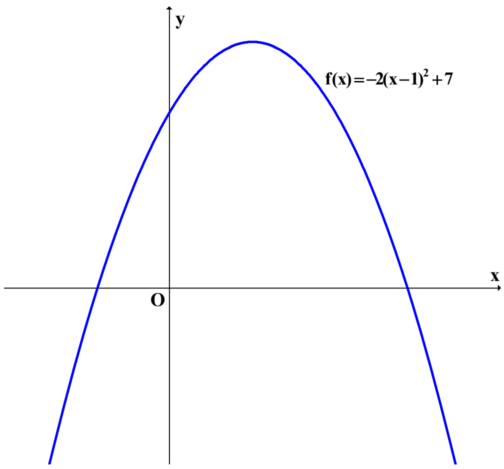
$f(x) = g(x) + c,\quad c > 0$ προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της συνάρτησης g κατά c μονάδες προς τα πάνω.

Συνεπώς η συνάρτηση που προκύπτει όταν μετατοπίσουμε την

$g(x) = 2(x-1)^2 + 5$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω είναι η

$f(x) = g(x) + 2$ ή $f(x) = 2(x-1)^2 + 7$.





β) Κατ' αρχάς μετατοπίζουμε την συνάρτηση $\varphi(x) = -2x^2 + 5$ κατά δύο μονάδες προς τα δεξιά οπότε η συνάρτηση g που προκύπτει θα έχει τύπο $g(x) = -2(x-2)^2 + 5$.

Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \varphi(x) - c, \quad c > 0$ προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g κατά c μονάδες προς τα κάτω. Επομένως μετατοπίζοντας την συνάρτηση $g(x) = -2(x-2)^2 + 5$ κατά 6 μονάδες προς τα κάτω προκύπτει η συνάρτηση $f(x) = g(x) - 6$ ή $f(x) = -2(x-2)^2 - 1$.